

ГЛАВА 2

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МЕХАНИКИ ТВЕРДОГО ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА

2.1. Элементарный объем породного массива

**2.2. Напряженно-деформированное состояние
породного массива**

2.3. Виды напряженного состояния

2.4. Дифференциальные уравнения равновесия

2.5. Граничные условия

2.6. Уравнение совместности деформаций

Для математического описания процессов, протекающих в породном массиве вследствие проведения выработок, в механике горных пород используют, как правило, соотношения механики твердого деформируемого тела: теории упругости, пластичности и ползучести.

2.1. Элементарный объем породного массива

Основным в механике твердого деформируемого тела является предположение о том, что рассматриваемая среда лишена структуры и обладает сплошностью с непрерывным распределением вещества, так называемый **континуум**. Эта гипотеза позволяет считать напряжения и деформации непрерывными и дифференцируемыми функциями координат точек тела. Предполагается также, что любые достаточно малые, т.н. элементарные, объемы рассматриваемой среды обладают одинаковыми физико-механическими свойствами. Применительно к механике горных пород таким гипотетическим сплошным и однородным телом является породный массив, вмещающий горные выработки.

Однако реальный породный массив, как природная система, обладает высокой степенью неупорядоченности, в которой в зависимости от размеров изучаемой области можно выделить (рис. 2.1) четыре масштабных уровня неоднородности [49, 50]:

1. Микроскопический: среда рассматривается на уровне кристаллов, размер неоднородностей составляет $10^{-8} - 10^{-5}$ м.

2. Субмакроскопический: среда рассматривается на уровне

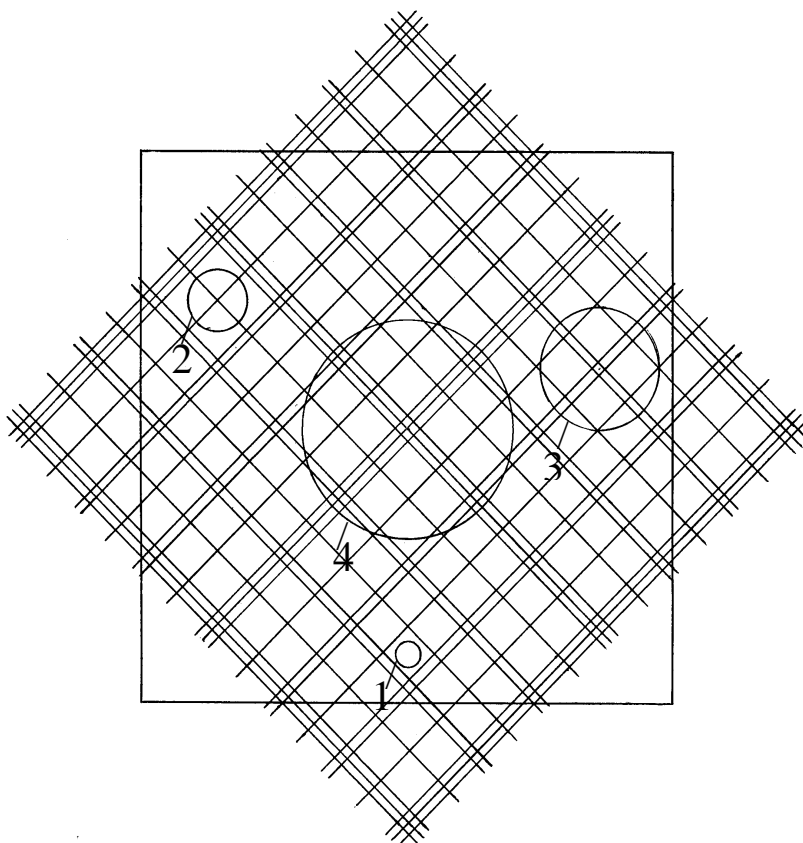


Рис. 2.1. Уровни неоднородности в породных массивах: 1 – микроскопический; 2 – субмакроскопический; 3 – макроскопический; 4 – мегаскопический

элементарного объема литологической разности, размер элементов неоднородностей составляет $10^{-5} - 10^{-2}$ м.

3. Макроскопический: среда рассматривается на структурном уровне, размеры неоднородностей составляют $10^{-2} - 10^1$ м.

4. Мегаскопический: среда рассматривается как сложноструктурное образование, обладающее текстурой и находящиеся под действием гравитационных и тектонических сил. Размер элементов неоднородностей составляет более 1,0 м.

Первые два уровня изучает физика горных пород, а два последующих – это предмет исследований механики горных пород.

На макроскопическом уровне горные породы обладают внутренней неоднородностью. Они содержат поликристаллы минералов разной крепости, микротрещины, поры, включения и другие дефекты, приводящие к местной концентрации напряжений. Однако, поскольку этих микродефектов очень много, то в силу статистических законов в одних и тех же условиях относительные перемещения точек реального деформируемого тела (B и B_1) будут практически совпадать с перемещениями соответствующих точек (A и A_1) однородной модели (рис. 2.2). При этом, чем меньше размеры микродефектов и чем их больше, тем меньше погрешность, связанная с применением методов механики сплошной среды.

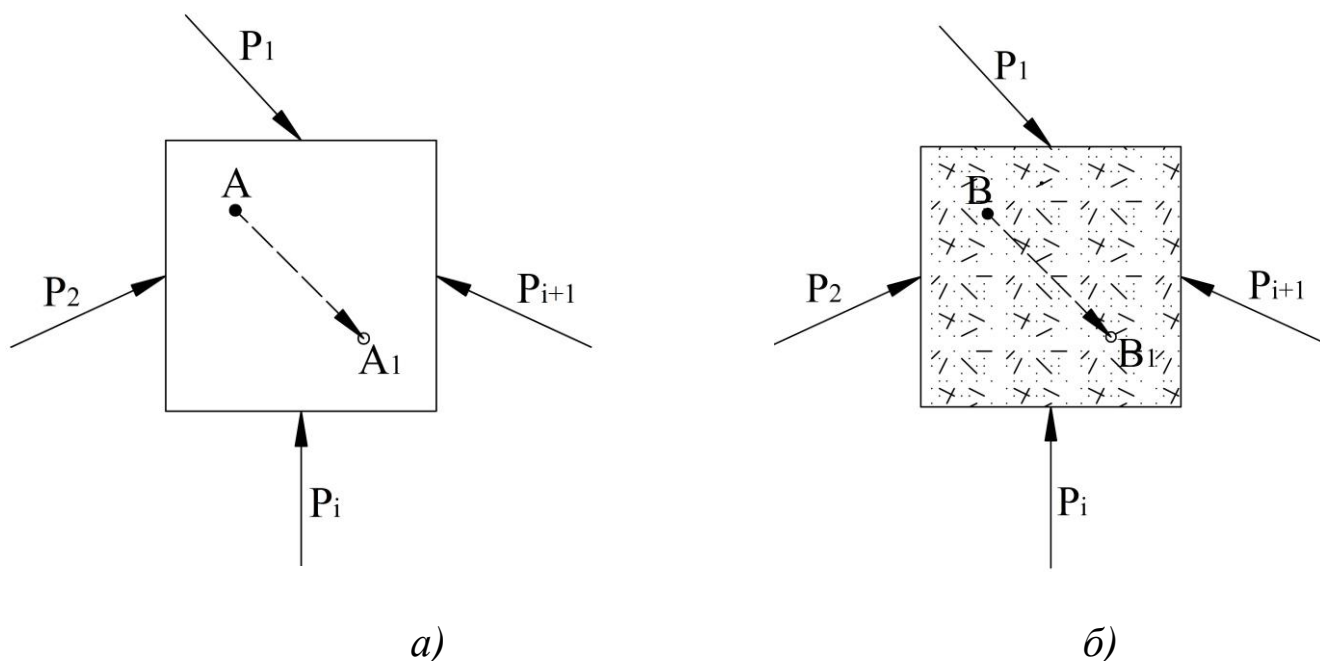


Рис. 2.2. Однородная (а) и неоднородная (б) модели породной среды

Из сказанного выше следует, что элементарный объем породного массива должен быть достаточно малым, чтобы выполнялась исходная предпосылка о сплошности среды и, в то же время достаточно большим, чтобы он обладал всеми усредненными свойствами изучаемого объекта на субмакроскопическом уровне. Такой элементарный объем называют **физически малым**. Его можно представить в виде куба, имеющего соответствующее число граней и ребер. Грань такого кубика образует **элементарную площадку**, а ребро – **элементарную длину**.

Задача о возможной величине погрешности, получаемой вследствие замены реальной неоднородной среды однородной сплошной моделью, была поставлена и решена Ф.С. Ясинским в 1887 г. [51]. В результате ее решения было установлено, что величина возможной ошибки зависит от характерных размеров исследуемой области L и размеров l слагающих ее элементарных частиц (объемов). Согласно теории Ф.С. Ясинского, среду можно считать идеальной (сплошной и однородной), если имеет место неравенство

$$\frac{L}{l} > a^2, \quad (2.1)$$

где a – некоторое достаточно большое число, выбранное с таким расчетом, чтобы при принятой степени точности величина a^{-1} была значительно меньше единицы и ею можно было бы пренебречь.

Позднее, применительно к металлам, были поставлены специальные опыты, которые показали, что проволока из особой стали с ясно выраженной зернистой структурой имеет по длине вполне постоянные свойства, если количество зерен в ее поперечном сечении становится больше 30.

Другими опытами с металлами было установлено, что при измерении деформаций тензорезисторами с малой базой показания их становятся стабильными, если в пределах базы находится более 10 зерен структуры.

К.В. Руппенейт и Ю.М. Либерман [11], решая специально поставленную для этой цели статистическую задачу, определили, что с вероятностью 0,98 грань элементарного объема песчаника должна иметь размер около 29 мм и содержать не менее 8 зерен.

В настоящее время нередко используют классификацию осадочных пород по крупности зерна, предложенную ИГН АН СССР (табл. 2.1) [11]. В этой же таблице приведен ориентировочный размер элементарной площадки.

Размер L исследуемой области в задачах механики горных пород, как правило, на порядок больше размеров выработок и равен 40-50 м.

Величина a^{-1} для выработок, заложенных даже в такой неоднородной породе, как конгломерат, в соответствии с табл. 2.1 равна 0,012, в аргиллите – 0,005, что значительно меньше единицы, как того и требует теория Ф. С. Ясинского.

Таблица 2.1.

Размер элементарной площадки применительно
к осадочным породам

Наименование породы	Средний размер зерна, мм	L , мм
Конгломерат	10,0	67
Гравелит	1,0 – 10,0	6,7 – 67
Песчаник крупнозернистый	0,5 – 1,0	3,3 – 6,7
Песчаник среднезернистый	0,25 – 0,5	1,7 – 3,3
Песчаник мелкозернистый	0,1 – 0,25	0,7 – 1,7
Алевролит крупнозернистый	0,05 – 0,1	0,3 – 0,7
Алевролит мелкозернистый	0,01 – 0,05	0,1 – 0,3
Аргиллит	0,01	0,1

Таким образом, при изучении механических явлений, протекающих в породном массиве вокруг выработок, вполне обоснованно можно применять соотношения механики твердого деформируемого тела, основанные на гипотезе непрерывной однородной среды.

Переход от сумакроскопического уровня неоднородностей породного массива к макро- и мегаскопическому выполняется на основе учета масштабного эффекта (см. § 1.6).

2.2. Напряженно-деформированное состояние породного массива

Теория напряжений. Принимая во внимание гипотезу об однородности и непрерывном распределении вещества, выделим в деформированном породном массиве, который находится в равновесии, произвольную точку A (x, y, z).

Мысленно рассечем рассматриваемый массив плоскостью, проходящей через точку A на две части и отбросим одну из них (рис. 2.3.). При этом для того, чтобы оставшаяся часть осталась в состоянии равновесия к плоскости сечения необходимо приложить некоторые внутренние силы p_v , распределенные по этому сечению и отра-

жающие действие отброшенной части породного массива на оставшуюся. **Величина, характеризующая интенсивность распределения внутренних сил, называется напряжением.**

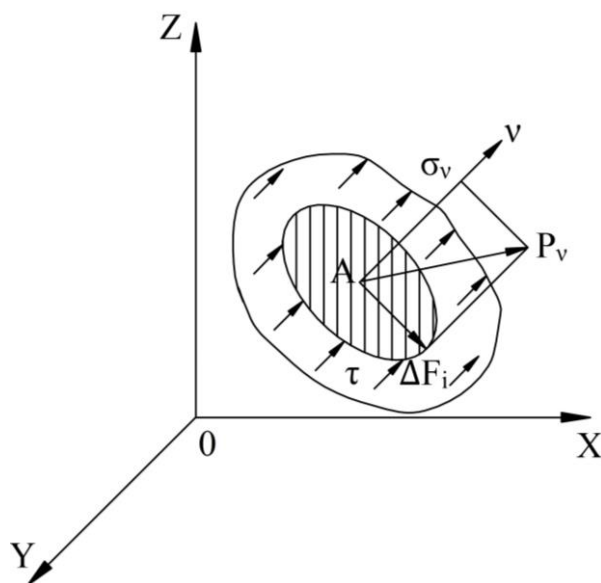


Рис. 2.3. Схема к выводу величины напряжения

Выделим в окрестности точки A элемент ΔF площади сечения. Пусть ν – внешняя нормаль к элементу площади ΔF . Обозначим углы, образованные нормалью с осями координат через $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$. Косинусы этих углов называются **направляющими** и обозначаются, соответственно, через l, m, n . Внутренние силы P_v заменим главным вектором ΔP_v , приложенным в точке A . Отношение ΔP_v к ΔF характеризует среднюю интенсивность распределения внутренних сил по рассматриваемой элементарной площадке. При стремлении ΔF к нулю предел отношения имеет вполне определенное значение, называемое **полным напряжением** p_ν в точке A по площадке с нормалью ν :

$$p_\nu = \lim_{\Delta F \rightarrow 0} \frac{\Delta P_v}{\Delta F}. \quad (2.2)$$

Для дальнейшего рассмотрения целесообразно ввести в рассмотрение две составляющие полного напряжения p_ν : проекцию вектора P_v на нормаль ν к площадке, т.е. **нормальное напряжение** σ_ν , и проекцию вектора P_v на плоскость элементарной площадки ΔF_i – **касательное напряжение** τ_ν .

Очевидно, что через точку A можно провести множество различно ориентированных площадок ΔF_i . Каждой из площадок соответствует свой вектор полного напряжения P_{vi} . Совокупность векторов

напряжений во всех площадках, проходящих через рассматриваемую точку, полностью характеризует напряженное состояние в этой точке.

Напряженное состояние в точке A может быть определено также заданием векторов напряжений P_x, P_y, P_z в трех взаимноперпендикулярных площадках, проходящих через эту точку (рис. 2.4). Пересекаясь, эти площадки образуют некоторую прямоугольную систему координат.

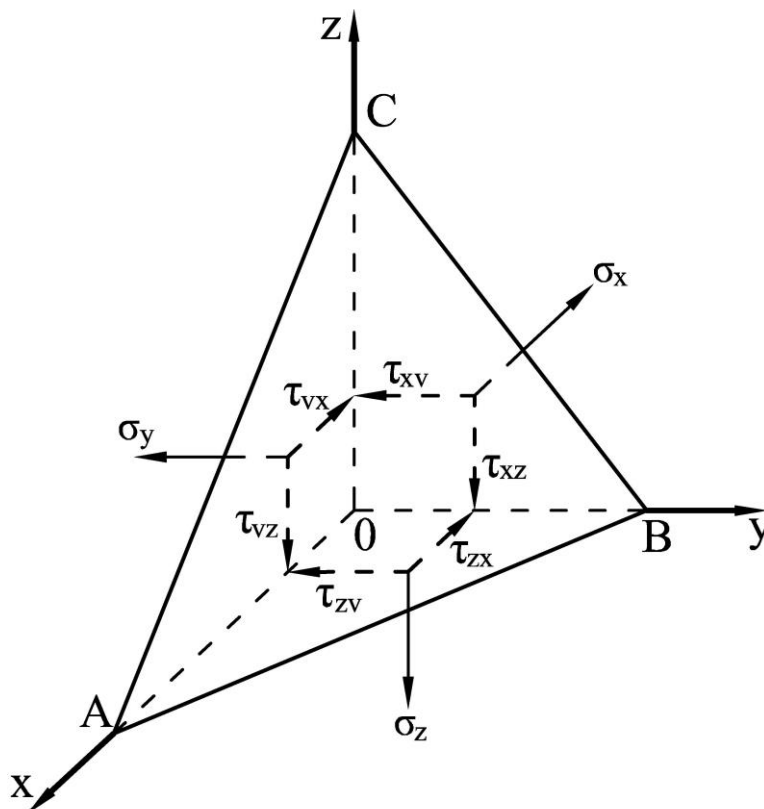


Рис. 2.4. Обозначение компонентов напряжения на косоj произвольно ориентированной площадке

Полное напряжение, например, P_x в координатной плоскости yOz , т.е. в площадке с нормалью x , в общем случае раскладывается на три напряжения, параллельные осям координат: нормальное напряжение σ_x и касательные напряжения τ_{xy}, τ_{xz} . Эти составляющие называют еще **компонентами** напряжения. Индексы у касательных напряжений означают: первый – координатную ось, нормальную к рассматриваемой площадке, второй – координатную ось, которой рассматриваемая составляющая касательного напряжения параллельна. Таким образом, имеется три компонента **нормального** σ_x, σ_y и σ_z и шесть - касательного **напряжений** - $\tau_{xy}, \tau_{yx}, \tau_{xz}, \tau_{zx}, \tau_{yz}, \tau_{zy}$.

Зная величины и направления нормальных и касательных напряжений в трех взаимноперпендикулярных площадках, которые

принимаются за координатные плоскости, можно вычислить напряжения в любой площадке, проходящей через рассматриваемую точку, если известны направляющие косинусы l, m, n нормали ν к этой площадке по отношению к выбранным осям.

Итак, полное напряжение P_ν можно разложить на составляющие, параллельные координатным осям X_ν, Y_ν, Z_ν . Тогда из условия равновесия пирамиды $ABCO$ получим следующие выражения для составляющих полного напряжения P_ν в наклонной грани пирамиды:

$$\left. \begin{aligned} X_\nu &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ Y_\nu &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n; \\ Z_\nu &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Полное напряжение P_ν на наклонной площадке определится через свои составляющие следующим образом:

$$P_\nu = \sqrt{X_\nu^2 + Y_\nu^2 + Z_\nu^2}. \quad (2.4)$$

Таким образом, напряженное состояние в произвольной точке породного массива считается установленным, если известны девять компонентов напряжений, из которых, в силу закона парности касательных напряжений ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ и т.д.) независимыми являются шесть.

В геомеханике часто используют иное представление о распределении напряжений в породном массиве. Для этого в окрестности исследуемой точки выделяют прямоугольный параллелепипед, грани которого параллельны координатным плоскостям (рис. 2.5). На гранях параллелепипеда изображают составляющие компоненты напряжения. Компоненты напряжения на параллельных гранях равны, если расстояние между ними стремится к нулю.

Можно доказать, что напряженное состояние в точке исследуемого тела есть некоторая величина, не зависящая от выбора координатных осей [25]. Эта величина называется **тензором напряжения**, а компоненты напряженного состояния - **компонентами тензора**. Более строгое определение понятия «тензор» рассматривается в специальном разделе математики – тензорном исчислении.

Как числа и векторы, тензоры можно складывать, умножать. Так, суммой двух тензоров является новый тензор, компоненты которого равны суммам соответствующих компонент слагаемых тензоров. Умножить тензор на число – значит умножить на это число каждый из его компонент.

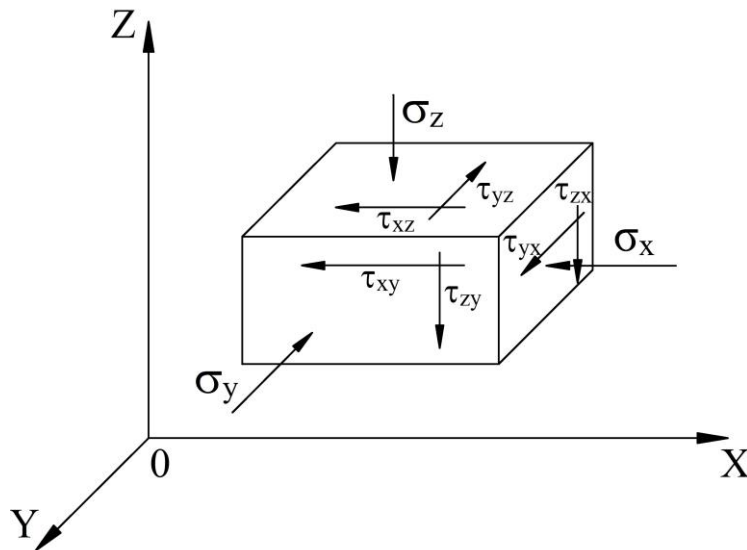


Рис. 2.5. Обозначение компонентов напряжений на гранях элементарного куба

Тензор напряжения записывается в форме следующей симметричной матрицы

$$T_H = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Если ввести понятие о среднем, или **гидростатическом**, напряжении

$$\sigma_{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad (2.6)$$

то тензор напряжения можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$T_H = T_H^o + D_H, \quad (2.7)$$

где T_H^o - **шаровой тензор**, равный

$$T_H^O = \begin{vmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{vmatrix}, \quad (2.8)$$

и D_H - девиатор напряжений, равный

$$D_H = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_{cp} \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

Шаровой тензор в общем напряженном состоянии обеспечивает уменьшение (увеличение) объема деформируемого тела без изменения формы, а девиатор – изменение его формы.

Систему координат всегда можно изменить таким образом, что направления координатных осей совпадут с линиями действия таких нормальных напряжений, при которых касательные напряжения равны нулю. Эти напряжения называют **главными** и обозначают $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Причем, подразумевается, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Главные напряжения в точке $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ можно вычислить, зная девять компонент напряжения при произвольной ориентации системы координат. Так, например, для определения величины σ_1 следует приравнять нулю определитель

$$\Delta_H = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_1 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma_1 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.10)$$

Развернув этот определитель в строчку, получим кубическое уравнение с одним неизвестным σ_1 :

$$\sigma_1^3 = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma_1^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma_1 - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{zy}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xt}^2) = 0. \quad (2.11)$$

Коэффициенты при σ_1^2, σ_1 и свободный член в уравнении (2.11) называются, соответственно, **первым, вторым и третьим инвариантами** тензора напряжения и обозначаются J_1, J_2, J_3 .

Первый инвариант J_1 называется линейным. Он характеризует изменение объема вещества в окрестности инварианта J_2 и определяет возможность перехода тела в пластическую область. Мизес показал, что пластическая текучесть наступает, если второй инвариант тензора девиатора напряжений достигает некоторой критической величины, характерной для данного тела:

$$J_2 = k^2, \quad (2.12)$$

где k - константа материала, которая равна пределу текучести при чистом сдвиге.

Третий инвариант также имеет определенный физический смысл.

Теория деформаций. Под деформацией породного массива подразумевают изменение взаимного положения его точек. По-прежнему полагаем, что породная среда является сплошной и однородной. Тогда в любой ее точке находится материальная частица. Пусть координаты этой частицы будут x, y, z . В процессе деформирования породной среды рассматриваемая частица получит перемещения u, v, w по направлениям координатных осей x, y, z и в результате будет иметь координаты $x+u, y+v, z+w$. В общем случае перемещения u, v, w меняются от точки к точке и поэтому являются функциями координат x, y, z .

Исследование деформаций начнем на примере двухмерной задачи плоской деформации. Под плоской деформацией будем понимать такой частный случай деформированного состояния, при котором все частицы, находившиеся первоначально в одной плоскости, останутся после деформирования в той же плоскости. Предположим, что координатные оси выбраны так, что оси x и y лежат в плоскости деформации. Тогда $w=0$, а величины u и v не зависят от координат z .

Рассмотрим малый прямоугольный элемент $ABCD$ недеформированной породной среды со стороны dx и dy (рис. 2.6).

После деформации элемент занимает положение $A'B'C'D'$. С геометрической точки зрения различают два основных типа деформа-

ций: **линейную** – изменение первоначальной длины – и **угловую** – изменение величины первоначально прямого угла. Продольная деформация обозначается буквой ε , сдвиговая – γ .

Продольная деформация определяется как предел отношения изменения длины отрезка $\Delta\sigma$ к его первоначальной длине ΔL , т.е.

$$\varepsilon = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta L}, \quad (2.13)$$

или

$$\varepsilon = \lim_{\Delta L \rightarrow 0} \frac{A'D' - AD}{AD}. \quad (2.14)$$

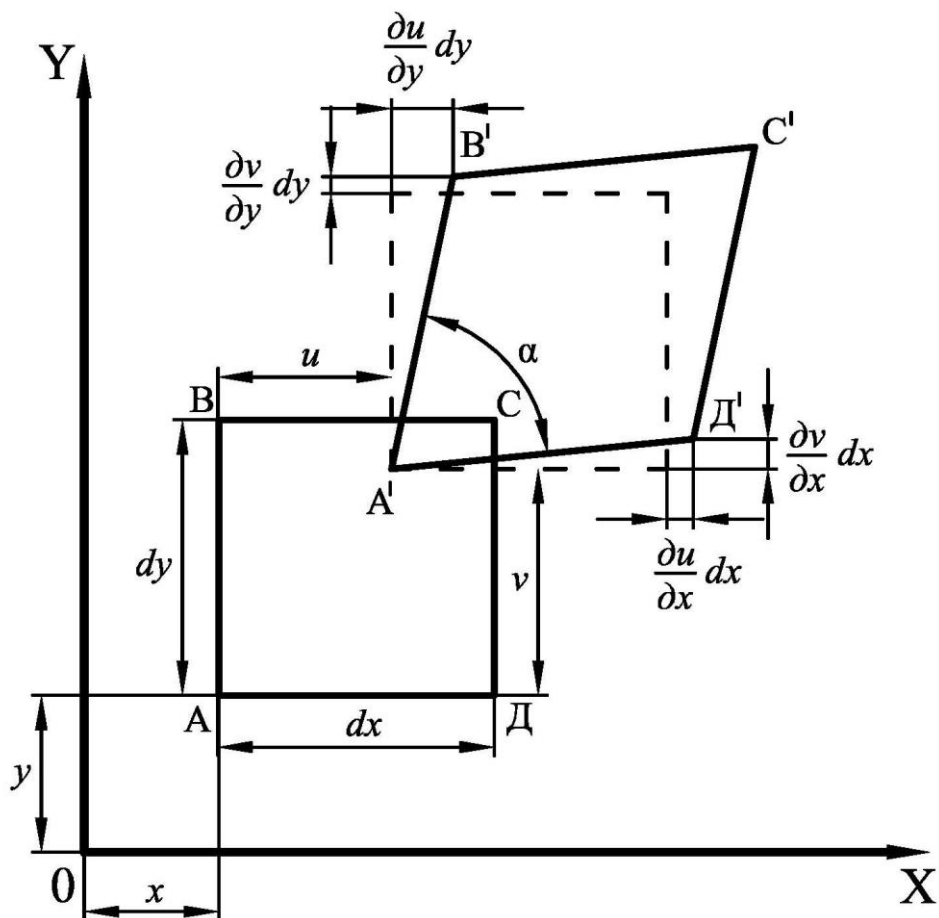


Рис. 2.6. Схема к выводу соотношений между компонентами перемещений и деформаций

Выражая длины отрезков $A'D'$ и AD через U и dx и пренебрегая величинами высшего порядка малости для продольной деформации в направлении оси x , после преобразований получим, что

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (2.15)$$

Чтобы определить деформацию сдвига, рассмотрим искажение первоначально прямого угла $ВАД$. Деформация сдвига χ_u в точке A определится как изменение величины угла между двумя элементарными отрезками AB и AD , первоначально параллельными осями x и y . Из геометрического рассмотрения получим

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.16)$$

Для трехмерной задачи компоненты деформаций могут быть получены аналогичным образом. Они будут равны:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \right\}. \quad (2.17)$$

Эти соотношения известны под названием **уравнений Коши**. Шесть величин $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, называются компонентами деформации. Деформации сдвига, как следует из (2.17), обладают симметрией, т.е. $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \gamma_{zx} = \gamma_{xz}$ и т.д.

Тензор деформации также записывается в виде симметричной квадратной матрицы:

$$\vec{T}_d = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} \quad (2.18)$$

По аналогии с напряжениями можно ввести в рассмотрение понятие о средней деформации:

$$\varepsilon_{cp} = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Тогда тензор деформации, подобно тензору напряжения, можно также разложить на **шаровой тензор деформаций** и **девиатор деформаций**:

$$T_d = T_d^o + D_d. \quad (2.19)$$

Шаровой тензор деформации представляет собой следующую матрицу

$$T_{\ddot{a}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{\tilde{n}\delta} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\tilde{n}\delta} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\tilde{n}\delta} \end{vmatrix}, \quad (2.20)$$

а девиатор деформаций с достаточной для расчётов точностью выглядит так:

$$\ddot{A}_{\ddot{a}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{\tilde{n}\delta} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y - \varepsilon_{\tilde{n}\delta} & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z - \varepsilon_{\tilde{n}\delta} \end{vmatrix}. \quad (2.21)$$

Первый характеризует величину объемного расширения (сжатия), второй – формоизменение объема в окрестности рассматриваемой точки среды.

Связь между напряжениями и деформациями. Все тела, находящиеся в напряженном состоянии, получают деформацию. Зависимость между деформацией и приложенной силой впервые была сформулирована Гуком применительно к тонкому стержню. В случае объемного напряженного состояния закон Гука формулируется следующим образом: **в любой точке сплошной среды каждый из шести компонентов напряжений является линейной функцией шести компонентов деформации, и наоборот.** Это положение называется **обобщенным законом Гука** и записывается так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \mu (\sigma_y + \sigma_z) \right], \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \mu (\sigma_z + \sigma_x) \right], \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \mu (\sigma_x + \sigma_y) \right]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Составляющие тензоров напряжения и деформации связаны между собой следующими линейными зависимостями:

$$T_N^O = G T_{\delta}^O, \quad (2.23)$$

$$D_n = 2GD_\delta. \quad (2.24)$$

Выражение (2.23) называют **законом упругого изменения объема**, а выражение (2.24) - **законом упругого изменения формы**.

2.3. Виды напряженного состояния

Из предыдущего параграфа следует, что в самом общем случае напряженно-деформированное состояние выделенного элементарного объема в окрестности рассматриваемой точки характеризуется наличием девяти компонентов напряжений и девяти компонентов деформаций. Такое напряженно-деформированное состояние, как уже отмечалось, называется **объемным**.

Решение объемных задач даже только с применением методов теории упругости сопряжено со значительными математическими трудностями. Поэтому решение любой геомеханической задачи начинают с анализа особенностей напряженно-деформированного состояния для того, чтобы упростить исходную расчетную схему и привести ее по возможности к так называемой плоской задаче, когда всего лишь два компонента напряжений и два компонента деформаций зависят от координат точек тела.

Так, например, если тонкую пластину, находящуюся в состоянии равновесия под действием внешних сил, нагрузить равномерно распределенными по толщине усилиями, приложенными к ее границе параллельно плоскости пластины, то компоненты напряжений $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ на обеих поверхностях пластины будут равны нулю и можно предположить, что они равны нулю и внутри пластины (рис. 2.7).

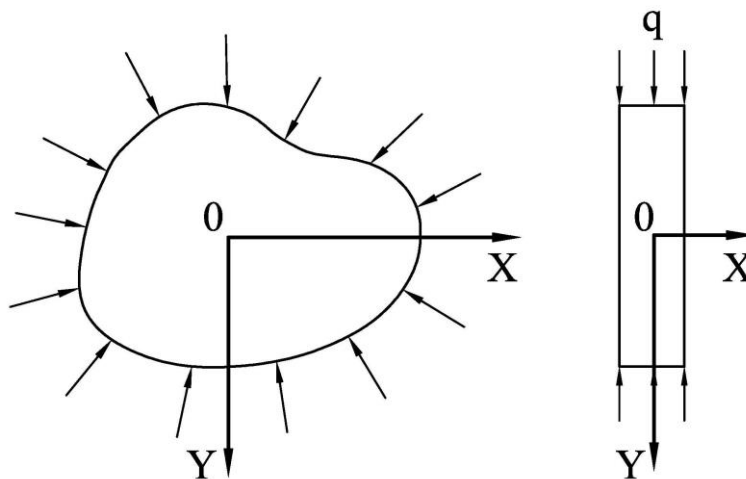


Рис. 2.7. Плоское напряженное состояние

Такое напряженное состояние будет определяться только компонентами напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и называется **плоским напряженным состоянием**. Доказано, что в тонких пластинах все три неизвестные компоненты напряжений не зависят от координаты Z , а являются только функциями координат X и Y .

Плоское напряженное состояние не является характерным для задач геомеханики. Но упрощения, подобные приведенным выше, возможны и в другом предельном случае, когда размер тела в направлении оси Z очень велик.

Это могут быть, например, подпорная стенка или длинная горизонтальная выработка (рис.2.8.а,б). Очевидно, что если мы будем рассматривать напряженно-деформированное состояние массива вокруг выработки на достаточном удалении от ее торцов, то все сечения, перпендикулярные продольной оси выработки Z , будут находиться в одинаковых условиях.

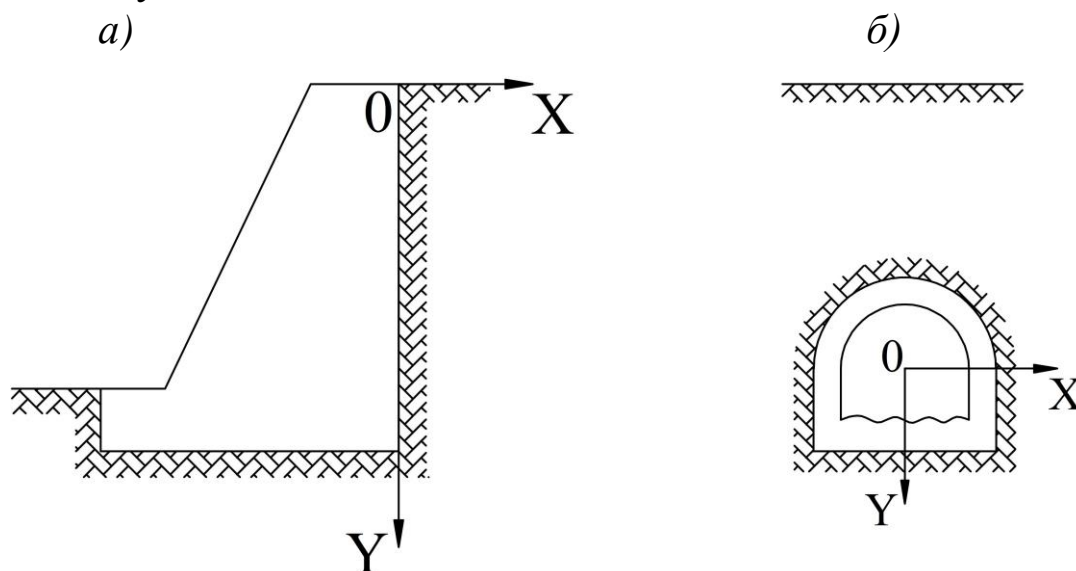


Рис. 2.8. Плоское деформированное состояние

Компоненты перемещений u и v не зависят от координаты Z и являются функциями координат X и Y . Продольные перемещения w при этом равны нулю. Такое напряженное состояние называется **плоской деформацией**.

Принимая во внимание соотношение (2.18), получим

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Продольные напряжения σ_z можно получить, используя закон Гука (2.22).

$$\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y) = 0,$$

или

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Эти нормальные напряжения действуют по всем поперечным сечениям, достаточно удаленным от торцов выработки.

Таким образом, задача о плоской деформации, как и задача о плоском напряженном состоянии, сводится к определению компонентов напряжений σ_x, σ_y и τ_{xy} , как функций X и Y .

Это обстоятельство, как будет показано далее, существенно упрощает задачу и позволяет получить ее решение в замкнутом виде, то есть в виде конечных формул.

Одноосное напряженное состояние характеризуется одним компонентом напряжений и соответствующим ему компонентом деформации. Оно реализуется в стержневых системах. В задачах механики подземных сооружений такое напряженно-деформированное состояние встречается при расчете конструкций крепи горных выработок, различных ферм, балок.

2.4. Дифференциальные уравнения равновесия

Рассмотрим равновесие малого элементарного параллелепипеда с размерами вдоль осей X и Y соответственно $\Delta x, \Delta y, b$ и толщиной, равной единице.

Обозначим площадки, на которых действуют напряжения, индексами 1,2,3,4. С учетом изменения напряжений в пространстве, напряжения, например, σ_x для граней 1 и 3, не строго равны друг другу. Символы $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$, относятся к т. $O(x, y)$ в центре прямоугольника на рис. 2.9.

Значения напряжений посередине граней будем обозначать через $(\sigma_x)_1, (\sigma_x)_3$, и т.д. Поскольку грани прямоугольника малы, то усилия, приложенные к ним, определяются путем умножения соответствующих напряжений на площадь граней, по которым они действуют. Массовые силы в данном случае имеют тот же порядок, что и напряжения. Обозначим компоненты массовых сил через X и Y , тогда уравнение равновесия сил, действующих параллельно оси X , будет иметь вид:

$$(\sigma_x)_1 \Delta y - (\sigma_x)_3 \Delta y + (\tau_{xy})_2 \Delta x - (\tau_{xy})_4 \Delta x + X \Delta x \Delta y = 0,$$

или, после деления всех членов уравнения на $\Delta x \Delta y$,

$$\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{\Delta x} + \frac{(\tau_{xy})_2 - (\tau_{xy})_4}{\Delta y} + X = 0. \quad (2.25)$$

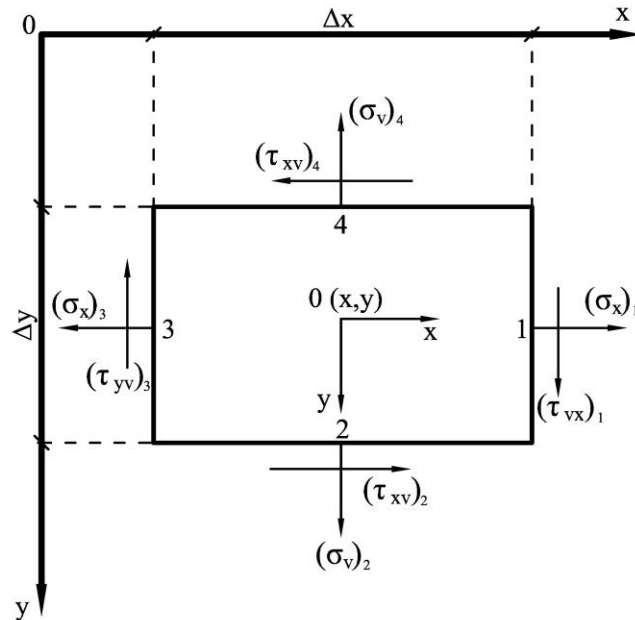


Рис. 2.9. К выводу дифференциальных уравнений равновесия в системе прямоугольных координат

Если теперь уменьшить размеры элементарного параллелепипеда, положив $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, то, согласно определению производной, предел выражения $\frac{(\sigma_x)_1 - (\sigma_x)_3}{\Delta x}$ будет равен $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$, а второй член уравнения (2.25) станет равным $\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}$. Аналогичные выражения получим, проецируя все силы на ось Y .

Таким образом, будем иметь

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0, \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0.$$

Это и есть два дифференциальных уравнения равновесия для двумерной плоской задачи.

Практически во всех задачах геомеханики единственной массовой силой является вес горных пород. Тогда, направив ось Y вниз и обозначив через γ объемный вес горных пород ($\gamma = \gamma_0 g$), получим уравнения равновесия в следующем виде:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \gamma = 0. \quad (2.27)$$

Очень многие задачи механики горных пород удобно решать в полярной системе координат (r, θ) , в которой компоненты напряжений имеют обозначения σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$. (рис. 2.10).

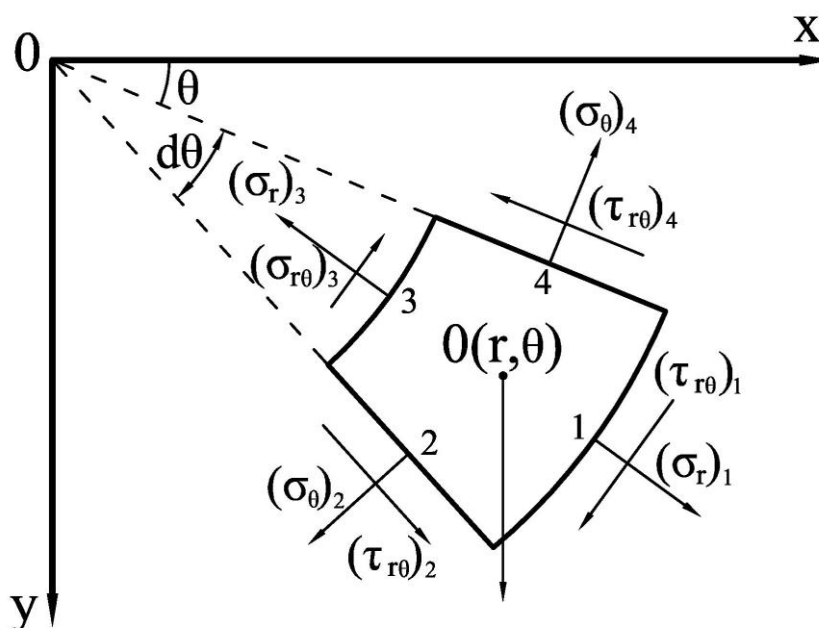


Рис. 2.10. К выводу дифференциальных уравнений равновесия в полярных координатах

Между напряжениями, записанными в полярной и прямоугольной системе координат, существуют следующие функциональные соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - 2\tau_{xy} \sin \theta \cos \theta, \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Подставляя (2.28) в (2.27), получим дифференциальное уравнение равновесия в полярной системе координат

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \gamma \sin \theta = 0, \quad (2.29)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} + \gamma \cos \theta = 0.$$

В случае полярно-симметричной задачи ($\tau_{r\theta}=0$) и при отсутствии массовых сил ($\gamma=0$) уравнения равновесия (2.29) сводятся к одному, более простому

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (2.30)$$

2.5. Уравнение совместности деформаций

Определение компонентов напряжений, возникающих вокруг горных выработок, является одной из основных задач механики горных пород. В двухмерной задаче необходимо для этого решить дифференциальные уравнения равновесия (2.27) или (2.28) таким образом, чтобы удовлетворялись граничные условия. Однако заметим, что компонентов напряжений три, а уравнений равновесия – два, то есть задача является статически неопределимой. Чтобы получить ее решение, необходимо рассмотреть упругую деформацию тела.

Соотношения Коши применительно к плоской задаче имеют следующий вид:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad (2.31)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r\partial\theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}; \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\theta}. \quad (2.32)$$

Заметим, что три компонента деформации выражаются через две функции u и v , то есть они не могут выбираться произвольно: между компонентами деформации должна существовать определенная взаимосвязь. Для того, чтобы установить ее, продифференцируем дважды первое из уравнений (2.31) по y , второе по x , а третье один раз по x , а второй - по y и получим следующее выражение:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (2.33)$$

Дифференциальное соотношение (2.33) называется **уравнением совместности деформаций**. Оно должно удовлетворяться при подстановке компонентов деформаций, чтобы обеспечить существование функций u и v , связанных с компонентами деформаций уравнениями (2.33).

Физически условие совместности деформаций можно объяснить следующим образом. Если прямоугольную пластину условно разделить на маленькие прямоугольники линиями, параллельными его сторонам, а потом деформировать ее и зафиксировать эти деформации, то, вырезав затем маленькие деформированные прямоугольники, сложить их обратно можно только зная зависимость, согласно которой деформации передаются от одного прямоугольника к смежному с ним. Эта зависимость и есть условие совместности деформаций.

Используя соотношения закона Гука для исследуемого вида плоского состояния, условие совместности может быть переписано в напряжениях. С незначительной погрешностью и для плоской деформации, и для плоского напряженного состояния [43] уравнение совместности, выраженное через компоненты напряжений, при отсутствии массовых сил или их постоянстве имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad (2.34)$$

где $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ - оператор Лапласа.

В полярной системе координат уравнение совместности может быть записано следующим образом:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (2.35).$$

Можно показать, что в случае полярно-симметричной расчетной схемы уравнения (2.34) и (2.35) сводятся к простому выражению

$$\sigma_x + \sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta = 2p,$$

где p – интенсивность внешней нагрузки.

Уравнения равновесия и совместности деформаций позволяют решить задачу об определении компонентов поля напряжений в замкнутом виде.

Интересно отметить, что полученные уравнения не содержат механических характеристик материала. Это значит, что распределение напряжений в любых объектах, если форма их и внешние усилия совпадают, одинаковы для любых изотропных материалов. Данное заключение обладает большой важностью. Как будет показано далее, для некоторых прозрачных материалов, таких как целлулоид, агар-агар, желатин и др., напряжения можно определить экспериментально, используя поляризованный свет, а затем переносить полученные результаты на такие же по форме объекты, но сделанные из другого материала, например, стали, горной породы и т.п.

2.6. Граничные условия

Уравнения равновесия должны удовлетворяться во всех точках исследуемого тела. При достижении границ области компоненты напряжений должны быть такими, чтобы они находились в равновесии с внешними силами, приложенными к границе. В силу этого внешние силы можно рассматривать как продолжение внутренних напряжений.

Рассмотрим малую треугольную призму, такую, что ее гипотенуза совпадает с границей тела (рис 2.11).

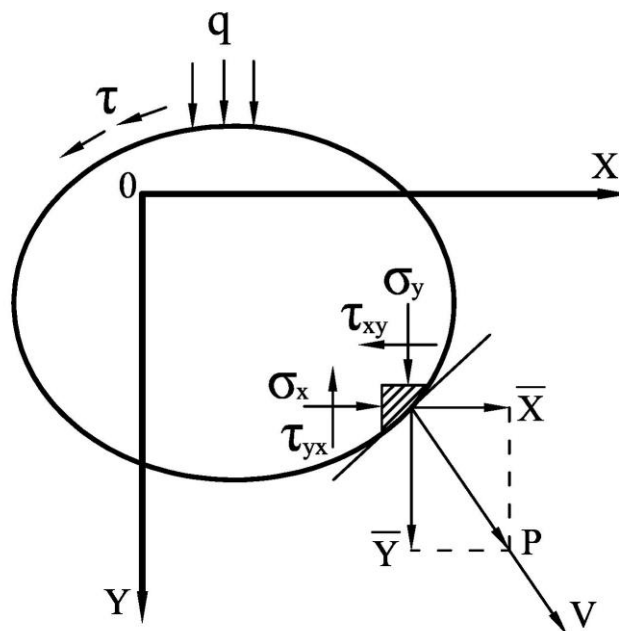


Рис. 2.11. К определению граничных условий

Обозначим через \bar{X} и \bar{Y} компоненты поверхностных сил P , отнесенных к единице поверхности в этой точке границы. Уравнения равновесия будут иметь вид:

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy}, \quad \bar{Y} = m\sigma_y + l\tau_{yx}, \quad (2.36)$$

где l, m – направляющие косинусы нормали ν к границе.

В частном случае рассмотрения равновесия прямоугольной пластинки координатные оси обычно направляют параллельно граням пластинки и граничные условия (2.36) можно упростить. Пусть, например, одна из сторон пластинки параллельна оси X , тогда нормаль ν на этой части границы будет параллельна оси Y ; отсюда $l=0, m=1$. Уравнения (2.36) в этом случае примут вид:

$$\bar{X} = \pm\tau_{xy}; \quad \bar{Y} = \pm\sigma_y. \quad (2.37)$$

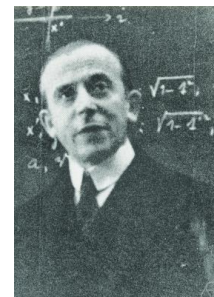
причем знак (+) берется в том случае, если нормаль ν проведена в сторону положительных значений y ; в противном случае берется знак (-). Из последних формул видно, что компоненты напряжений на границе равны компонентам поверхностных усилий, отнесенных к единице площади границы.

Биографическая справка

1. Ясинский, Феликс Станиславович (1856-1899) – русский инженер, известный специалист в области строительной механики. Автор прикладной теории устойчивости сжатых стержней.



2. Мизес, Рихард (1883-1953) – известный немецкий ученый, математик и механик. Основные работы относятся к прикладной механике, теории вероятностей и аэродинамике. Автор феноменологической теории прочности твердых тел.



Контрольные вопросы и задания

1. Что называют «физически малым элементарным объемом»?
2. В чем суть соотношения Ф.С. Ясинского?
3. Назовите виды напряженного состояния.
4. Что такое «тензор напряжения» и «тензор деформации»?
5. Сформулируйте «закон упругого изменения объема» и «закон упругого изменения формы».
6. Запишите обобщенный закон Гука и соотношения Коши.
7. Чем отличается плосконапряженное состояние от плоскодеформированного?
8. Запишите уравнение равновесия в прямоугольной системе координат, (в полярной).
9. В чем состоит физический смысл уравнения совместности деформаций?
10. Как формулируются граничные условия в задачах геомеханики?
11. Как используют на практике факт отсутствия в уравнениях равновесия прочностных и деформационных характеристик?